

Esercitazione sulle equazioni parametriche

Premessa

Nell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ sussistono le seguenti relazioni tra i coefficienti a, b, c e la somma ed il prodotto delle radici

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (1)$$

*** **

Equazioni parametriche

1) Nell'equazione parametrica $\frac{x}{3x+5} - \frac{x+k}{3+x} = 0$ risolvere i quesiti che seguono.

- a. Trovare il valore di k tale che $x=-1$ sia radice dell'equazione. Per il valore di k determinato trovare l'eventuale seconda radice dell'equazione corrispondente.

Risposte: $k = 0$; $x_2 = 0$.

- b. Determinare per quale valore del parametro k l'equazione ammette come radice $x_1 = \frac{1}{2}$; per il corrispondente valore di, k determinare la seconda radice.

Risposte: $k = -\frac{3}{13}$; $x_2 = -\frac{15}{13}$

- c. Trovare il valore di k tale che una radice sia $x=4$

Soluzione

- a. Imponendo che $x=-1$ sia soluzione si perviene all'uguaglianza

$$\frac{-1}{-3+5} - \frac{-1+k}{3-1} = 0, \text{ da cui si deduce } k = 0. \text{ L'equazione parametrica diventa}$$

$$\frac{x}{3x+5} - \frac{x}{3+x} = 0 \rightarrow x \left(\frac{1}{3x+5} - \frac{1}{3+x} \right) = 0 \rightarrow -2x \left(\frac{x+1}{3x+5} \right) = 0, \text{ le cui radici sono}$$
$$x_1 = -1, x_2 = 0.$$

- b. Il valore $x_1 = \frac{1}{2}$ per definizione di radice deve soddisfare l'equazione, dunque deve risultare

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+5} - \frac{\frac{1}{2}+k}{3+\frac{1}{2}} = 0, \text{ da cui } k = -\frac{3}{13}.$$

L'equazione assegnata diventa $\frac{x}{3x+5} - \frac{x-\frac{3}{13}}{3+x} = 0$, che si riduce alla seguente

$26x^2 + 17x - 15 = 0$, le cui radici sono

$$x_2^1 = \frac{-17 \pm \sqrt{1849}}{2 \cdot 26} = \frac{-17 \pm 43}{2 \cdot 26}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{15}{13}.$$

- c. Imponendo la condizione che $x=4$ sia radice dell'equazione si ricava per il parametro il valore $k = -\frac{40}{17}$. Sostituendo a k detto valore nell'equazione parametrica, dopo le necessarie elaborazioni algebriche, si ottiene l'equazione

$$17x^2 - 43x - 100 = 0, \text{ che ammette come radici } x_1 = -\frac{25}{17}; x_2 = 4.$$

- 2) Nell'equazione parametrica $(2k-3)x^2 - x - 4k = 0$ determinare i valori del parametro k per i quali sono rispettivamente soddisfatte le seguenti richieste:
- Una radice dell'equazione sia $x=-1$. Per il valore trovato determinare la seconda radice dell'equazione.
 - La somma delle radici dell'equazione sia $1/2$. Determinare le radici della corrispondente equazione.
 - Il prodotto delle radici dell'equazione sia $-11/5$. Determinare le radici della corrispondente equazione.

Soluzione

- a) Sostituendo nell'equazione $x=-1$ si ha l'uguaglianza

$$(2k-3)+1-4k = 0 \rightarrow k = -1; \text{ l'equazione parametrica diventa}$$

$$-5x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow 5x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10}, \text{ da cui}$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{4}{5}.$$

- b) La somma delle radici dell'equazione di secondo grado in esame per la (1) vale

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2k-3}, \text{ quindi deve risultare}$$

$$\frac{1}{2k-3} = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{5}{2}.$$

La corrispondente equazione è

$$\left(2 \cdot \frac{5}{2} - 3\right)x^2 - x - 4 \cdot \frac{5}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0, \text{ le cui radici sono } x_1 = -2; x_2 = \frac{5}{2}.$$

c) Il prodotto delle radici è $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, quindi deve risultare

$$\frac{-4k}{2k-3} = -\frac{11}{5} \rightarrow k = \frac{33}{2}$$

L'equazione parametrica diventa

$$30x^2 - x - 66 = 0, \text{ le cui radici sono } x_1 = -\frac{22}{15}, x_2 = \frac{3}{2}.$$